SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2002-2003

Ermanno Lanconelli

ALCUNE NOZIONI DI CURVATURA RELATIVE ALLA FORMA DI LEVI. PRINCIPIO DI CONFRONTO FORTE E RISULTATI DI SIMMETRIA

13 maggio 2003

Tecnoprint - Bologna 2005

ABSTRACT. Some notions of curvature for real hypersurfaces imbedded in complex euclidean spaces are introduced. The new notions are related to the Levi form the way the classical Mean and Gauss curvatures are related to the real Hessian form.

We then show some strong comparison principle for the involved Partial Differential Operators.

Finally, as an appplication, we state some symmetry and identification results.

Alcune nozioni di curvatura relative alla forma di Levi. Principi di confronto forte e risultati di simmetria

ERMANNO LANCONELLI

In collaborazione con Annamaria Montanari

Sunto. Vengono presentate alcune definizioni di curvatura per ipersuperfici di classe C^2 frontiere di domini immersi in $\mathbb{C}^{n+1}$. Si utilizzano funzioni simmetriche degli autovalori della forma di Levi. Gli operatori di curvatura che ne derivano conducono ad equazioni alle derivate parziali del secondo ordine totalmente non lineari la cui forma caratteristica, quando viene calcolata su funzioni pseudoconvesse in un opportuno senso generalizzato, risulta semidefinita positiva e con nucleo di dimensione uno. Le equazioni così introdotte sono quindi non ellittiche in ogni punto. Tuttavia, come viene dimostrato, la direzione di ellitticità mancante viene recuperata mediante opportune operazioni di commutazione. Questa proprietà viene utilizzata per dimostrare principi di confronto forte dai quali vengono successivamente dedotti risultati di simmetria per domini con curvature costanti, e teoremi di identificazione per domini aventi curvature confrontabili.

1 Forma di Levi normalizzata ed m-curvatura

Sia $bD = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : f(z) = 0\}$ una ipersuperficie reale, frontiera del domino $D = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : f(z) < 0\}$. Supponiamo f reale, con derivate seconde continue e tale che

$$\partial_p f := (f_{z_1}(p), \dots, f_{z_{n+1}}(p)) \neq 0$$

in ogni punto $p \in bD$. Useremo sempre le notazioni seguenti:

$$f_{z_\ell} = \frac{\partial f}{\partial z_\ell}, \quad f_{\bar{z}_\ell} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\ell}.$$

Scriveremo anche f_ℓ and $f_{\bar{\ell}}$ invece di f_{z_ℓ} and $f_{\bar{z}_\ell}$, rispettivamente. Notazioni analoghe verranno usate per le derivate seconde. Denotiamo con $T_p^{\mathbb{C}}(bD)$ lo spazio tangente complesso a bD nel punto p:

$$T_p^{\mathbb{C}}(bD) = \{h \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle h, \bar{\partial}_p f\rangle = 0\}.$$

Qui $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica il consueto prodotto interno Hermitiano in $\mathbb{C}^{n+1}$ e $\bar{\partial}_p f = (f_{\bar{z}_1}(p), \dots, f_{\bar{z}_{n+1}}(p))$.

Con $\mathcal{H}_p(f)$ indicheremo la matrice Hessiana complessa della funzione f calcolata nel punto p,

$$\mathcal{H}_p(f) := \left(f_{j,\bar{k}}(p)\right)_{j,k=1,\dots,n+1}.$$

La forma Hermitiana

$$\zeta \longmapsto L_p(f,\zeta) := \langle {}^t\mathcal{H}_p(f)\zeta, \zeta\rangle = \sum_{j,k=1}^{n+1} f_{j,\bar{k}}\zeta_j\bar{\zeta}_k,$$

ristretta allo spazio tangente complesso $T_p^{\mathbb{C}}(bD)$, è la *forma di Levi* della funzione f nel punto p. Ricordiamo che D viene chiamato strettamente pseudoconvesso se la forma di Levi di f è strettamente definita positiva in ogni punto di bD.

Sia $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormale di $T_p^{\mathbb{C}}(bD)$. Chiamiamo *B-matrice di Levi B-normalizzata* di bD nel punto $p \in bD$ la seguente matrice Hermitiana $n \times n$

$$L_p(f, B) = \left(\frac{1}{|\partial_p f|}\langle {}^t\mathcal{H}_p(f)u_j, u_k\rangle\right)_{j,k=1,\ldots,n}. \tag{1}$$

Ovviamente, $L_p(f, B)$ dipende dalla funzione definente f nonchè dalla base B di $T_p^{\mathbb{C}}(bD)$. Tuttavia *i suoi autovalori dipendono solo dal dominio D*. Precisamente, se f' e B' sono, rispettivamente, un'altra funzione definente di D e un'altra base ortonormale di $T_p^{\mathbb{C}}(bD)$ allora

$$\lambda(L_p(f, B)) = \lambda(L_p(f', B')).$$

Conveniamo di denotare con $\lambda(A)$ l'insieme degli autovalori della matrice A. Per ragioni di brevità, nel seguito scriveremo $\lambda_p(bD)$ invece di $\lambda(L_p(f, B))$.

Se $p \in bD$ indichiamo con $(\lambda_1(p), \ldots, \lambda_n(p))$ gli autovalori della forma di Levi normalizzata. Ovviamente essi sono tutti reali. Definiamo

$$\text{Curvatura Totale di Levi di } bD \text{ nel punto } p: \qquad K_p^{(n)} = (\lambda_1(p), \cdots, \lambda_n(p))$$

e

$$\text{Curvatura Media di Levi di } bD \text{ nel punto } p: \qquad K_p^{(1)} = \frac{\lambda_1(p)+\ldots+\lambda_n(p)}{n}$$

In generale , per $1 \leq m \leq n$, definiamo la *m-curvatura di Levi* come segue:

$$K_p^{(m)} = \frac{m!(n-m)!}{n!}\sigma^{(m)}(\lambda_1(p) + \cdots + \lambda_n(p)),$$

ove $\sigma^{(m)}$ indica la m-esima funzione simmetrica elementare. Nozioni di curvatura analoghe a quelle date ora sono state introdotte da Bedford & Gaveau in [BG 78], da Slodkowski & Tomassini in [ST 94] e, molto più recentemente, da Montanari in [M 01].

Esempio 1 (m-curvatura delle sfere). Una funzione definente della palla

$$D_R = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : |z|^2 < R^2\}, \quad R > 0$$

è $f(z) = |z|^2 - R^2$. Qualunque sia B, base ortonormale dello spazio tangente a bD_R in un suo punto p, risulta

$$L_p(p, B) = \frac{1}{R}I_n, \quad I_n = \text{ matrice identità } \quad n \times n$$

Quindi, tutti gli autovalori della forma di Levi normalizzata sono uguali a $\frac{1}{R}$. Di conseguenza

$$K_p^{(m)}(bD_R) = \left(\frac{1}{R}\right)^m, \quad \forall\, p \in bD_R.$$

In generale, per ogni dominio D con funzione definente f, vale la seguente formula:

$$K_p^{(m)}(bD) = -\frac{1}{\binom{n}{q}}\frac{1}{|\partial f|^{q+2}} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{q+1} \leq n+1} \Delta_{(i_1, \cdots, i_{q+1})}(f)$$

dove

$$\Delta_{(i_1,\cdots,i_{q+1})}(f) = \det \begin{pmatrix} 0 & f_{\bar{i}_1} & \cdots & f_{\bar{i}_{q+1}} \\ f_{i_1} & f_{i_1,\bar{i}_1} & \cdots & f_{1,\bar{i}_{q+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i_{q+1}} & f_{i_{q+1},\bar{i}_1} & \cdots & f_{i_{q+1},\bar{i}_{q+1}} \end{pmatrix}.$$

Utilizzando alcune proprietà degli operatori di curvatura appena introdotti, con A. Montanari abbiamo dimostrato alcuni teoremi di simmetria e di identificazione per domini di $\mathbb{C}^{n+1}$. Questi risultati sembrano quindi provare che le m-curvature contengono siginificative informazioni geometriche.

Un domino D verrà chiamato *strettamente m-pseudoconvesso* se

$$K_p^{(j)}(bD) > 0 \quad \text{per ogni } j \leq m \quad \text{e per ogni } p \in bD$$

Il nostro principale teorema di identificazione è il seguente.

Teorema 1.1. *Siano D e D' aperti m-pseudoconvessi di $\mathbb{C}^{n+1}$ aventi frontiera connessa. Supponiamo inoltre $D' \subseteq D$*

a. *$D' \subseteq D$ e $bD \cap bD' \neq \emptyset$*

b. *Per ogni $p \in bD \cap bD'$ esiste un intorno aperto Ω di p tale che*

$$S_{z'}(bD') \leq S_z(bD)$$

per ogni $z' \in \Omega \cap bD'$ e $z \in \Omega \cap bD$.

Allora $D' = D$.

Da questo teorema e dal risultato dell' Esempio 1 si ottiene facilmente il risultato di simmetria del corollario seguente.

Corollario 1.1. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ un dominio m-pseudoconvesso avente frontiera connessa. Supponiamo che esista una palla $D_R(z_0) \subseteq D$ tangente a bD in qualche punto $p \in bD$. Allora, se*

$$K_z^{(m)}(bD) \geq \left(\frac{1}{R}\right)^m, \quad \forall z \in bD,$$

risulta $D = D_R(z_0)$.

Il precedente teorema segue da un principio di confronto forte per operatori di curvatura operanti su funzioni aventi epigrafici m-pseudoconvessi.

2 Funzioni m-pseudoconvesse. Principi di confronto forte.

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^{2n+1}$ e u una funzione di classe $C^2(\Omega, R)$. Identifichiamo $\mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}$ con $\mathbb{C}^{2n+1}$ e indichiamo con $x = (x_1, \cdots, x_{2n+1})$ e y i punti di $\mathbb{R}^{2n+1}$ e $\mathbb{R}$, rispettivamente. Scriveremo inoltre

$$z_j = x_{2j-1} + ix_{2j} \text{ per } j = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad z_{n+1} = x_{2n+1} + iy$$

Indichiamo con $\Gamma(u)$ e $\gamma(u)$ l'epigrafico e il grafico di u, rispettivamente. Diciamo che u è strettamente *m-pseudoconvessa* se $\Gamma(u)$ è strettamente m-pseudoconvesso in ogni punto di $\gamma(u)$. Definiamo

$$\mathcal{L}^{(m)}(u) = K_p^m(\gamma(u)), \quad p = (x, u(x)).$$

Vale allora il seguente cruciale teorema di struttura.

Teorema 2.1. *Se u è strettamente m-pseudoconvessa allora*

$$\mathcal{L}^{(m)}(u) = \sum_{j,k=1}^{2n} a_{j,k}(\xi) Z_j Z_k,$$

dove

a. $(a_{j,k} = a_{j,k}(Du(\xi), D^2u))_{j,k=1,\dots,2n}$ *è una matrice* $2n \times 2n$ *simmetrica e definita strettamente positiva in ogni punto* $x \in \Omega$.

b. $Z_j = \partial_{x_j} + a_j \partial_{x_{2n+1}}$ *ove* $a_j = a_j(Du)$.

c. *Se poniamo* $Z_{j,k} = [Z_j, Z_k]$ *allora*

$$Z_{j,k} = q_{j,k} \partial_{x_{2n+1}}$$

e per ogni $x \in \Omega$ *esiste una coppia* (j,k) *tale che* $q_{j,k}(x) \neq 0$.

L'operatore $\mathcal{L}^{(m)}$ è quindi ellittico soltanto lungo $2n$ direzioni linearmente indipendenti. La proprietà (c) del teorema precedente consente di recuperare la direzione mancante mediante commutazione dei campi Z_j. Più precisamente

$$dim\ (Span\,\{Z_j(x), Z_{jk}(x) : j,k = 1,\dots,2n\}) = 2n+1 \tag{2}$$

in ogni punto di Ω.

Questa proprietà consente di dimostrare il nostro teorema di confronto che estende quello dimostrato da G.Citti in [G 93] per una classe di equazioni quasilineari relative alla traccia della forma di Levi.

Teorema 2.2. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^{2n+1}$ e siano u e v funzioni di classe $C^2(\Omega, R)$. Supponiamo*

a $u \leq v$ *in* Ω, $u(x_0) = v(x_0)$ *in qualche punto* $x_0 \in \Omega$.

b $\mathcal{L}^{(m)}(v) \leq \mathcal{L}^{(m)}(u)$ *in* Ω

Allora $u(x) = v(x)$ *per ogni* $x \in \Omega$.

Dimostrazione. Lo schema della dimostrazione è il seguente. Posto $w = u - v$, utilizzando le ipotesi (a) e (b) si dimostra che risulta

$$\mathcal{M}(w) \geq 0 \ \text{ in } \Omega, \quad w \leq 0 \text{ in } \Omega, \quad w(x_0) = 0,$$

ove

$$\mathcal{M}(w) = \sum_{j,k=1}^{2n} b_{j,k}(\xi) Z_j Z_k(w) + \text{ termini di ordine uno.}$$

La matrice dei coefficienti $b_{j,k}$ è definita positiva in $\mathbb{R}^{2n}$ e gli operatori differenziali Z_j sono le linearizzazioni, calcolate sulla u, degli operatori del precedente teorema. Utilizzando la proprietà (2), con argomenti analoghi a quelli utilizzati da Bony in [B 69], si dimostra che la funzione w è identicamente nulla in Ω, e quindi il Teorema.

Riferimenti bibliografici

[1] E. BEDFORD, B. GAVEAU, *Hypersurfaces with bounded Levi form* Ind. Univ. mat. **27** no. 5 (1978) 867-873.

[2] J. M. BONY, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicitè du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptic dégénérés* Ann. inst. Fourier (Grenoble) **19** (1969) 277-304.

[3] L. CAFFARELLI, L. NIREMBERG, J. SPRUCK, *The Dirichlet problem for non-linear second order elliptic equations III: Functions of the eigenvalues of the Hessian* Acta Math. **155** (1985), 261-301.

[4] G. CITTI, *A comparison theorem for the Levi equation* Rend. Mat. Acc. Lincei s.9 **4** (1993) 207-212.

[5] J.P. D'ANGELO, *Several Complex Variables and the Geometry of Real Hypersurfaces*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.

[6] S. KRANTZ, *Function Theory of Several Complex Variables,* Wiley, New York, 1982.

[7] F. LASCIALFARI, A. MONTANARI, *Smooth regularity for solutions of the Levi Monge-Ampère equation*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **12** (2001) pagg. 115-123.

[8] A. MONTANARI, F. LASCIALFARI, *The Levi Monge-Ampère equation: smooth regularity of strictly Levi convex solutions,* preprint.

[9] R.M. RANGE, *Holomorphic Functions and Integral Representation Formulas in Several Complex Variables* Springer-Verlag, New York, 1986.

[10] Z. SLODKOWSKI, G. TOMASSINI, *The Levi equation in higher dimension and relationships to the envelope of holomorphy,* Amer. J. of Math. **116** (1994), 479-499.

[11] Z. SLODKOWSKI, G. TOMASSINI, *Weak solutions for the Levi equation and Envelope of Holomorphy,* J. Funct. Anal. **101**, no. 4 (1991), 392-407.

[12] G. TOMASSINI, *Geometric Properties of Solutions of the Levi equation*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **152** (1988), 331-344.